Cours de Mathématiques

Table des matières

I.Addition et soustraction de fractions

Propriété

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont le même dénominateur :

- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs
- on garde le dénominateur commun

Autrement dit

a, b et c étant des nombres relatifs, avec $c \neq 0$

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}} \qquad \boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

Propriété

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on les écrit d'abord avec le même dénominateur.

exemples :

$A = \frac{3}{8} + \frac{13}{20}$ pas le même dénominateur

$A = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} + \frac{13 \times 2}{20 \times 2}$ on écrit les termes avec le dénominateur 40

$A = \frac{15}{40} + \frac{26}{40}$ on obtient le même dénominateur

$A = \frac{15+26}{40} = \frac{41}{40}$ on applique la propriété

$B = 4 - \frac{7}{3}$

$B = \frac{4}{1} - \frac{7}{3}$ on transforme 4 en fraction

$B = \frac{4 \times 3}{1 \times 3} - \frac{7}{3}$

$B = \frac{12}{3} - \frac{7}{3}$

$B = \frac{12-7}{3}$

$B = \frac{5}{3}$

II.Triangles égaux

A.Définition et propriété

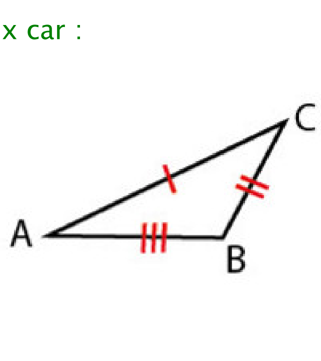
Définition :

Deux triangles sont égaux lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

exemple :

Les triangles ABC et EFG sont égaux car :

- AB = EF
- AC = EG
- CB = FG



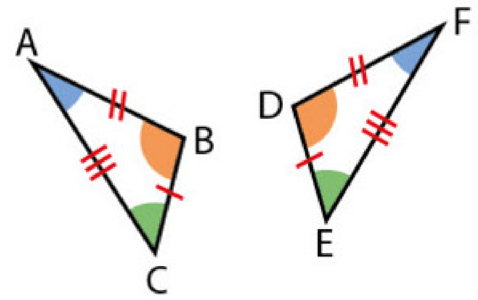
Propriété (admise) :

Si deux triangles sont égaux, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

exemple :

Les triangles ABC et EDF sont des triangles égaux, donc:

- $\widehat{BAC} = \widehat{DFE}$
- $\widehat{ABC} = \widehat{EDF}$
- $\widehat{ACB} = \widehat{DEF}$



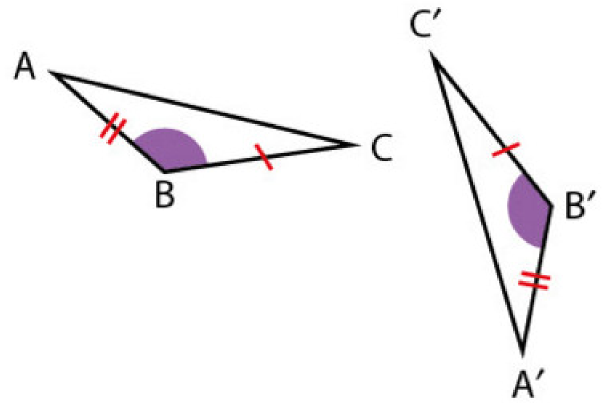
B.Reconnaître des triangles égaux

Propriété (admise) :

Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur, alors ils sont égaux.

- AB = A'B'
- BC = B'C'
- $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

Donc les triangles ABC et A'B'C' sont égaux

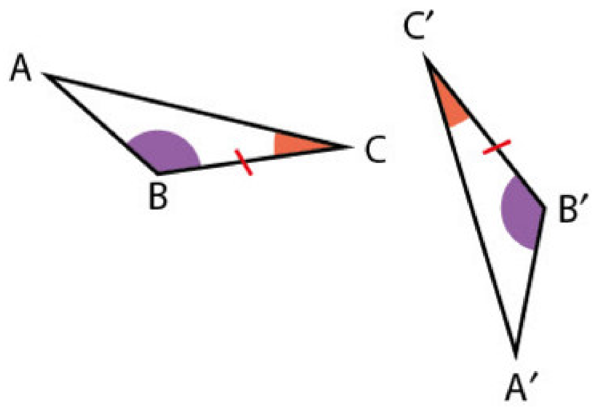


Propriété (admise) :

Si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure, alors ils sont égaux.

- BC = B'C'
- $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$
- $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$

Donc les triangles ABC et A'B'C' sont égaux



III.Nombres relatifs

A.Addition et soustraction

1.Calculer la somme de 2 nombres relatifs

Propriété :

Si deux nombres relatifs ont le même signe, alors leur somme a :
– le même signe que les deux nombres
– pour distance à zéro, la somme de leurs distances à zéro

Si deux nombres relatifs sont de signes différents, alors leur somme a :
– le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro
– pour distance à zéro, la différence de leurs distances à zéro

Autrement dit (méthode)
Pour ajouter 2 nombres relatifs :
- on garde le **signe du nombre le plus éloigné de 0.**
- si les 2 nombres sont de **même signe** on **ajoute les distances à zéro**
- si les 2 nombres sont de **signe contraire** on **soustrait les distances à zéro**

exemple

$(-2) + (+3) = +1$	$(-3) + (-1) = -4$	$(+5) + (+3) = +8$	$(+4) + (-21) = -17$
signes contraires ; on calcule $3 - 2$	même signe ; on calcule $3 + 1$	même signe ; on calcule $5 + 3$	signes contraires ; on calcule $21 - 4$

Écriture simplifiée :

$-2 + 3 = ...$ $\qquad$ $-3 - 1 = ...$

$5 + 3 = ...$ $\qquad$ $4 - 21 = ...$

2.Calculer la différence de 2 nombres relatifs

Propriété :

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

exemples :

$A = (-5) - (+4)$
Pour soustraire $(+4)$ j'ajoute (-4)
$A = (-5) + (-4) = -9$

$B = (-3) - (-2)$
Pour soustraire (-2) j'ajoute $(+2)$
$B = (-3) + (+2) = -1$

3.Calculer une somme algébrique

Méthode :

Pour effectuer une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs, on peut
– transformer les soustractions en additions
– ajouter les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux

exemple :

$C = (-1) + 3 - (-7) + (-2) - (+5) - 4$ $\qquad$ On transforme les additions en soustractions

$C = (-1) + 3 + 7 + (-2) + (-5) + (-4)$ $\qquad$ On peut passer en écriture simplifiée

$C = -1 + 3 + 7 - 2 - 5 - 4$

$C = 10 - 12 = -2$ $\qquad$ On regroupe et on ajoute entre eux les positifs et les négatifs

B.Multiplication

1.Calculer un produit

Propriété :

Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est un nombre relatif négatif.

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est un nombre relatif positif.

La distance à zéro du produit est le produit des distances à zéro.

Autrement dit (méthode)

Pour multiplier 2 nombres relatifs :

- on applique la règle des signes

  $(+...) \times (+...) = +...$

  $(-...) \times (+...) = -...$

  $(+...) \times (-...) = -...$

  $(-...) \times (-...) = +...$

- on multiplie les distances à zéro

exemples :

$3{,}5 \times (-2) = -7$ (signes contraires donc produit négatif)

$(-5) \times (-7) = 35$ (même signe donc produit positif)

2.Signe du produit de plusieurs facteurs

Propriété :

Dans un produit de plusieurs facteurs :

- si le nombre de facteurs négatifs est pair, alors ce produit est un nombre positif
- si le nombre de facteurs négatifs est impair, alors ce produit est un nombre négatif

exemple :

$(-4) \times (-2{,}7) \times 3 \times (-1{,}5) \times 5 \times (-3)$ est un produit contenant 4 facteurs négatifs, donc ce produit est positif.

$(-2) \times (-5) \times (-3) \times 4$ contient 3 facteurs négatifs, donc est négatif.

IV.Agrandissement – Réduction

A.Définition

Définition :

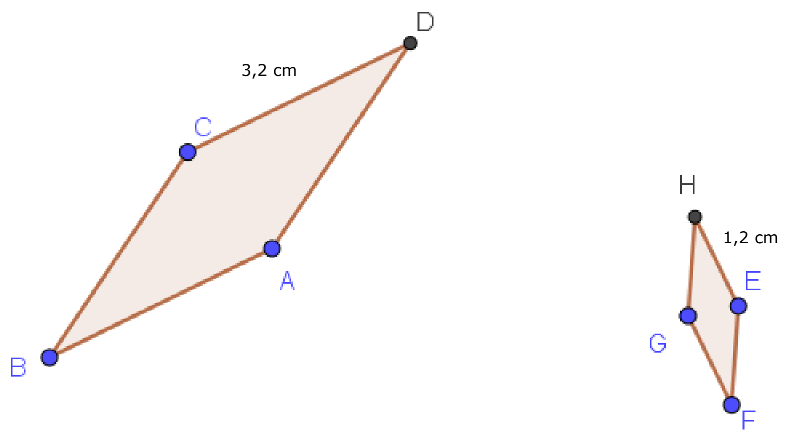
On réalise un agrandissement ou une réduction d'une figure ou d'un solide lorsque toutes les longueurs sont agrandies ou réduites proportionnellement, autrement dit multipliées par un même nombre k.

Si $k > 1$, c'est un agrandissement de rapport k (ou d'échelle k)

Si $k < 1$, c'est une réduction de rapport k (ou d'échelle k)

exemple :

Le losange EFGH est une réduction du losange ABCD, de rapport $\frac{1,2}{3,2} = 0,375$



Tracer un agrandissement du losange ABCD de rapport 1,5

$3,2 \times 1,5 = 4,8$ cm

Attention les diagonales aussi doivent être agrandies dans le même rapport

BD = 6 cm devient $6 \times 1,5 = 9$ cm

B.Effet sur les angles

Propriété (admise) :

Dans un agrandissement ou une réduction, les angles sont conservés.

exemples :

Dans l'exemple précédent, on a $\widehat{ABC} = \widehat{EFG} = ...$

V. Agrandissement – Réduction

A. Définition

Définition :

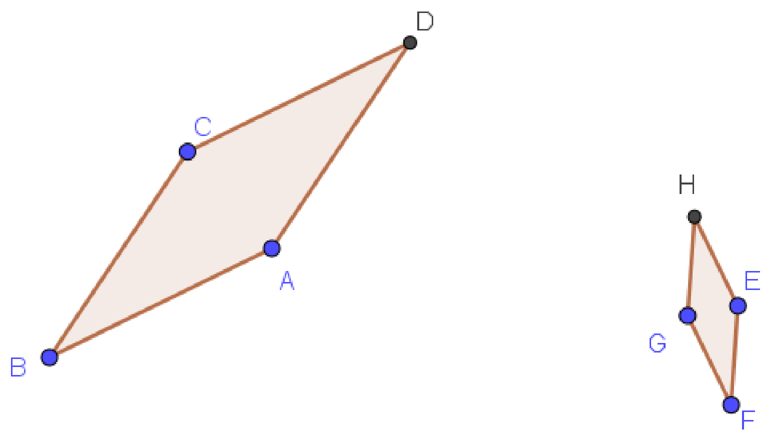
On réalise un agrandissement ou une réduction d'une figure ou d'un solide lorsque toutes les longueurs sont agrandies ou réduites proportionnellement, autrement dit multipliées par un même nombre k.

Si $k > 1$, c'est un agrandissement de rapport k (ou d'échelle k)

Si $k < 1$, c'est une réduction de rapport k (ou d'échelle k)

exemple :

Le losange EFGH est .... du losange ABCD, de rapport ......



Tracer un agrandissement du losange ABCD de rapport 1,5

B. Effet sur les angles

Propriété (admise) :

Dans un agrandissement ou une réduction, les angles sont conservés.

exemples :

Dans l'exemple précédent, on a $\widehat{ABC} = \widehat{EFG} = ...$

V.Puissances d'exposant entier positif

A.Définition

Définition

a étant un nombre relatif et n un nombre entier supérieur ou égal à 2,

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots\dots \times a \times a \times a}_{\text{n facteurs égaux à a}}}$$

a^n se lit « a puissance n ».

n est appelé l'exposant de a^n.

exemples :

$2^4 = 16$ car $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$(-5)^2 = 25$ car $(-5) \times (-5) = 25$

$(-5)^3 = -125$ car $(-5) \times (-5) \times (-5) = -125$

$10^6 = 1\ 000\ 000$ car $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000\ 000$

Définition

On convient que $\boxed{a^1 = a}$ et que pour $a \neq 0$ $\boxed{a^0 = 1}$

exemples :

$4^1 = 4$ $7^0 = 1$

Convention

Dans une expression sans parenthèses, les puissances sont prioritaires par rapport à la multiplication.

exemples :

$A = 1 + 3 \times 2^3$

$A = 1 + 3 \times 8$

$A = 1 + 24$

$A = 25$

$B = 4^3 + 5 \times 3^2 - 10$

$B = 64 + 5 \times 9 - 10$

$B = 64 + 45 - 10$

$B = 99$

B.Puissances de 10

Propriété

n étant un entier positif, $\boxed{10^n = \underbrace{1000\dots.0000}_{\text{n zéros}}}$

exemples :

$10^3 = 1\ 000$

$10^{11} = 100\ 000\ 000\ 000$ (100 milliards : très grand)

238 millions $= 238\ 000\ 000 = 238 \times 10^6$

Propriété

Pour tout entier n positif, multiplier par 10^n revient à décaler la virgule de n rang vers la droite.

exemple :

$7{,}258 \times 10^5 = 725\ 800$

VI.Repérage dans un parallélépipède rectangle

A.Propriété et vocabulaire

Propriété

Tout point M d'un parallélépipède rectangle peut être repéré, à partir d'un sommet et des arêtes partant de ce sommet, par 3 nombres appelés ses coordonnées.

Vocabulaire

Les 3 coordonnées d'un point M sont notées (x_M ; y_M ; z_M).

- x_M est l'abscisse de M.
- y_M est l'ordonnée de M.
- z_M est la cote (ou l'altitude) de M.

On écrit M(x_M ; y_M ; z_M).

exemple

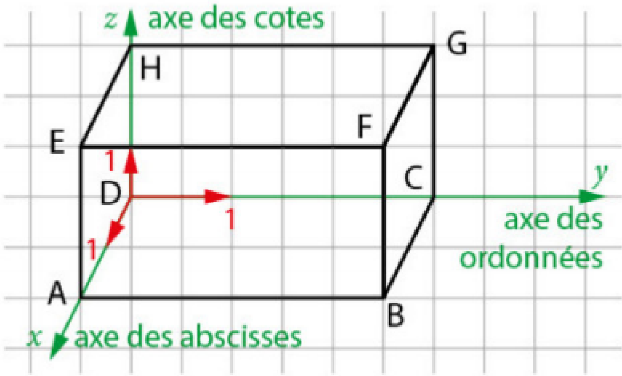
Dans le repère tracé ci-contre :

- D est l'origine du repère
- la droite (Dx) est l'axe des abscisses
- la droite (Dy) est l'axe des ordonnées
- la droite (Dz) est l'axe des cotes
- Coordonnées de quelques points :

D(… ;… ;…) A(… ;… ;…)

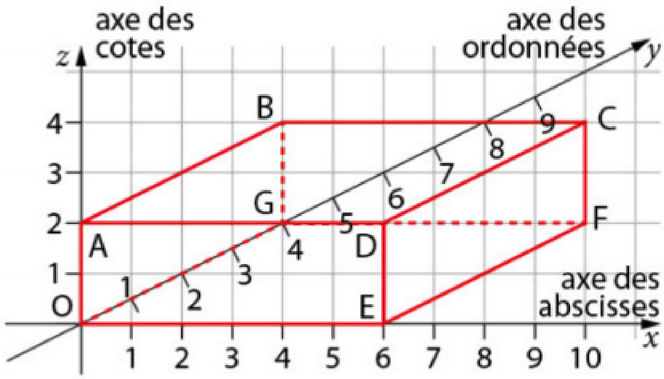
C(… ;… ;…) H(… ;… ;…)

B(… ;… ;…) F(… ;… ;…)



B.Application

Donner les coordonnées des sommets de ce pavé droit représenté dans le repère d'origine O ci-dessous.



VII.Quotient de deux nombres relatifs

A.Définition

Définition :

a et b étant des nombres relatifs, avec $b \neq 0$

Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

Autrement dit

$\frac{a}{b}$ est le nombre q tel que $q \times b = a$

exemples :

Le nombre q tel que $q \times 8 = 32$ est $4 = 32 \div 8 = \frac{32}{8}$

$\frac{5}{7}$ est le nombre qui, multiplié par 7, donne 5 : $\frac{5}{7} \times 7 = 5$

$\frac{-115}{5}$ est le nombre qui, multiplié par 5, donne -115

$\frac{-115}{5} = -23$ car $(-23) \times 5 = -115$

remarque :

Le quotient du nombre 10 par 0 n'existe pas car il n'y a pas de nombre q tel que $q \times 0 = 10$

B.Propriété

Propriété :

Le quotient de deux nombres relatifs de signe contraire est négatif.

Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif.

La distance à zéro du quotient est le quotient des distances à zéro.

Autrement dit (méthode)

Pour diviser 2 nombres relatifs :

- on applique la règle des signes de la multiplication
- on divise les distances à zéro

exemples :

$75 \div 3 = \frac{75}{3} = 25$

$(-8) \div (-0{,}5) = +$

$\frac{8}{0{,}5} = 16$

$100 \div (-4) = -\frac{100}{4} = -25$

Propriété :

a et b étant des nombres relatifs, avec $b \neq 0$

$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

$= -\frac{a}{b}$

exemples :

$$\frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad\qquad \frac{-4}{5} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

VIII.Produit de nombres en écriture fractionnaire

A.Produit d'un nombre par un quotient

Propriété (démontrée)

a, b, k étant des nombres relatifs, avec $b \neq 0$

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{k \times a}{b}$$

exemples :

$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{3}{5} \times (-15) = \frac{3 \times (-15)}{5} = \frac{-45}{5} = -9$$

B.Produit de deux nombres en écriture fractionnaire

Propriété (démontrée)

a, b, c et d étant des nombres relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

exemple :

$$\frac{3}{5} \times \frac{-2}{7} = \frac{3 \times (-2)}{5 \times 7} = \frac{-6}{35}$$

Attention

Il faut toujours chercher à simplifier avant de multiplier

exemple :

$$\frac{-36}{77} \times \frac{55}{27} = \frac{-36 \times 55}{77 \times 27} = \frac{-4 \times 9 \times 5 \times 11}{7 \times 11 \times 9 \times 3} = \frac{-20}{21} = -\frac{20}{21}$$

remarque

Cette propriété permet de démontrer la propriété des quotients égaux :

Pour b et k non nuls : $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \times \frac{k}{k} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$

C.Prendre une fraction d'un nombre

Propriété (admise)

Prendre une fraction d'un nombre revient à multiplier la fraction par ce nombre.

exemples :

$$\frac{2}{3} \text{ de } 12 = \frac{2}{3} \times 12 = \frac{12 \times 2}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

les quatre cinquièmes de $\frac{3}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{4 \times 3}{5 \times 4} = \frac{3}{5}$

IX.Égalité des produits en croix

A.Quotients égaux et produits en croix

Propriété des produits en croix (admise)

a, b, c et d étant des nombres relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Les cas où $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sont les mêmes que les cas où $a \times d = b \times c$.

exemples :

(1) on sait que $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$, et on a bien $30 \times 4 = 40 \times 3$

(2) on sait que $9 \times 4 = 6 \times 6$, et on a bien $\frac{9}{6} = 1{,}5 = \frac{6}{4}$

B.Application : déterminer si deux quotients sont égaux

1.Cas où les produits en croix sont égaux

Question

Les quotients $\frac{-3}{6}$ et $\frac{4}{-8}$ sont-ils égaux ?

Réponse

$(-3)\times(-8) = 24$

$6\times4 = 24$

Les produits en croix sont égaux, donc $\frac{-3}{6} = \frac{4}{-8}$

2.Cas où les produits en croix sont différents

Question

Les quotients $\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{4{,}5}$ sont-ils égaux ?

Réponse

$3\times4{,}5 = 13{,}5$

$7\times2 = 14$

Les produits en croix ne sont pas égaux, donc $\frac{3}{7} \neq \frac{2}{4}$

X.Proportionnalité et produits en croix

A.Grandeurs proportionnelles

Définition

Deux grandeurs sont proportionnelles si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre appelé coefficient de proportionnalité.

exemple

Masse de farine en kg	1	2	1,7	0,6
Prix en €	0,80			

× ......

Le prix en kg est proportionnel à la masse en kg.

Le coefficient de proportionnalité est .... C'est le prix en € d'un kg de farine.

Propriété

Dire que deux grandeurs sont proportionnelles revient à dire que les quotients $\frac{\text{valeur de la } 2^e \text{ grandeur}}{\text{valeur correspondante de la } 1^{ère} \text{ grandeur}}$ sont égaux au coefficient de proportionnalité.

exemples

1ère grandeur	13	15	20
2e grandeur	67,6	78	104

$\frac{67,6}{13} = ...$ $\frac{78}{15} = ...$ $\frac{104}{20} = ...$

Tous les quotients sont ...., donc ce tableau est un tableau de proportionnalité.

Les deux grandeurs sont ....

Le coefficient de proportionnalité est ....

1ère grandeur	8	21
2e grandeur	5	14

$\frac{5}{8} = ...$ $\frac{14}{21} = ...$

Les quotients ...., donc ce tableau ....

....

Les deux grandeurs ....

B.Calculer une quatrième proportionnelle

Propriétés

Si a, b, c et x sont des nombres relatifs, avec $a \neq 0$, tels que

a	c
b	x

soit un tableau de proportionnalité

alors

Règle de trois: $x = c \times \frac{b}{a}$

Égalité des produits en croix: $a \times x = b \times c$ donc $x = \frac{b \times c}{a}$

démonstrations

Règle de trois : Le coefficient de proportionnalité est $\frac{b}{a}$ et donc $c \times \frac{b}{a} = x$

Égalité des produits en croix : Les grandeurs sont proportionnelles donc $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$.

Donc d'après la propriété des produits en croix, $b \times c = a \times x$

Donc x est le quotient de $b \times c$ par a

exemple

Sur un plan, 4 cm représentent 45 m en réalité.

Combien 7 cm sur ce plan représentent-ils en réalité ?

Distance sur le plan, en cm	4	7
Distance réelle, en m	45	x

La distance réelle est proportionnelle à la distance sur le plan, donc

(égalité des produits en croix)

$4 \times x = 45 \times 7$ donc $x = \frac{45 \times 7}{4} = 78{,}75$

ou

(règle de trois)

1 cm sur le plan correspond à $\frac{45}{4} = 11{,}5$ m en réalité, donc

$x = 7 \times \frac{45}{4} = 7 \times 11{,}5 = 78{,}75$

7 cm sur ce plan représentent 78,75 m en réalité.

XI.Inverse et division en écriture fractionnaire

A.Inverse d'un nombre non nul

Définition

L'inverse d'un nombre non nul a est le nombre dont le produit par a donne 1.

exemples :

L'inverse de 2 est 0,5 car $2 \times 0{,}5 = 1$

Propriétés (démontrées)

a et b étant des nombres relatifs non nuls,

- si b est l'inverse de a alors a est l'inverse de b.
- l'inverse de a est le nombre $\frac{1}{a}$
- l'inverse de $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$ autrement dit $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$

exemples :

l'inverse de -3 est $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

l'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$

$$\dfrac{1}{\frac{5}{-8}} = \dfrac{-8}{5}$$

B.Division en écriture fractionnaire

Propriété (démontrée)

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Propriété (démontrée)

a, b, c et d étant des nombres relatifs, avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$$

$$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

exemples :

a) $\frac{5}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{2} = \frac{5 \times 7}{3 \times 2} = \frac{35}{6}$

b) $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{8 \times 8} = \frac{9}{64}$

c) $2 \div \frac{5}{7} = 2 \times \frac{7}{5} = \frac{14}{5}$

d) $\frac{2}{5} \div 7 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{2 \times 1}{5 \times 7} = \frac{2}{35}$

e) $\dfrac{2}{\dfrac{5}{7}} = 2 \times \dfrac{7}{5} = \dfrac{14}{5}$

f) $\dfrac{\dfrac{2}{5}}{7} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{2}{35}$

Attention

$$\dfrac{2}{\dfrac{5}{7}} \neq \dfrac{\dfrac{2}{5}}{7}$$

XII.Grandeurs quotients et grandeurs produits

A.Vitesse moyenne

Définition :

La vitesse moyenne v d'un mobile parcourant une distance d pendant un temps t est donnée par la formule

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} \quad \text{ou} \quad v = \frac{d}{t}$$

Attention aux unités :

$$\underset{\text{km/h}}{v} = \frac{\overset{\text{km}}{d}}{\underset{\text{h}}{t}} \qquad \underset{\text{m/s}}{v} = \frac{\overset{\text{m}}{d}}{\underset{\text{s}}{t}}$$

exemple :

Une voiture parcourt 130 km en 2,5 h.

Vitesse moyenne de la voiture en km/h :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{130}{2,5} = 52$$

La voiture a une vitesse moyenne 52 km/h.

Propriété :

On a aussi les égalités

$$\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps} \quad \text{ou} \quad d = v \times t$$

$$\text{temps} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{d}{v}$$

exemples :

1) Une voiture roule pendant 4,5h à une vitesse de 90 km/h.

Distance parcourue, en km :

$$d = v \times t = 90 \times 4,5 = 405$$

La voiture a parcouru 405 km.

2) Une voiture parcourt 10 km à une vitesse de 40 km/h.

Durée du trajet, en h :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{10}{40} = 0,25$$

Le trajet dure 0,25 h ou $\frac{1}{4}$ h ou 0,25$\times$ 60 = 15 min.

B.Grandeurs quotients, grandeurs produits

Définition :

Une grandeur quotient est une grandeur obtenue en effectuant le quotient de deux autres grandeurs.

exemples de grandeurs quotients :

- vitesse $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ (en km/h, m/s...)
- débit $= \dfrac{\text{volume}}{\text{temps}}$ (en m^3/s, L/min, L/s...)
- densité $= \dfrac{\text{nombre d'habitants}}{\text{superficie}}$ (en habitants/km^2, habitants/m^2...)
- masse volumique $= \dfrac{\text{masse}}{\text{volume}}$ (en kg/m^3)
- prix au kg $= \dfrac{\text{prix}}{\text{masse}}$ (en €/kg)

Définition :

Une grandeur produit est une grandeur obtenue en effectuant le produit de deux autres grandeurs.

exemples de grandeurs produits:

- aire = longueur $\times$ longueur (en km^2 , m^2 ...)
- volume = longueur $\times$ longueur$\times$ longueur (en m^3 , cm^3 ...)
- énergie = puissance $\times$ temps (en watts-heures ou Wh, kWh....)

XII. Grandeurs quotients et grandeurs produits

A. Vitesse moyenne

Définition :

La vitesse moyenne v d'un mobile parcourant une distance d pendant un temps t est donnée par la formule

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$ ou

Attention aux unités :

km/h km h

$$v = \frac{d}{t}$$

m/s m s

$$v = \frac{d}{t}$$

exemple :

Une voiture parcourt 130 km en 2,5 h.

Vitesse moyenne de la voiture en km/h :

$$v = \frac{d}{t} = \text{...}$$

La voiture a une vitesse moyenne de ....

Propriété :

On a aussi les égalités

$$\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps}$$ ou

$$\text{temps} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$$ ou

exemples :

1) Une voiture roule pendant 4h30 à une vitesse de 90 km/h.

Distance parcourue, ... :

d = ...

La voiture a parcouru ....

2) Une voiture parcourt 10 km à une vitesse de 40 km/h.

.... :

t = — = ...

....

B. Grandeurs quotients, grandeurs produits

Définition :

Une grandeur quotient est une grandeur obtenue en effectuant le quotient de deux autres grandeurs.

exemples de grandeurs quotients :

- vitesse $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ (en km/h, m/s...)
- débit $= \dfrac{\text{volume}}{\text{temps}}$ (en m^3/s, L/min, L/s...)
- densité $= \dfrac{\text{nombre d'habitants}}{\text{superficie}}$ (en habitants/km^2, habitants/m^2...)
- masse volumique $= \dfrac{\text{masse}}{\text{volume}}$ (en kg/m^3)
- prix au kg $= \dfrac{\text{prix}}{\text{masse}}$ (en €/kg)

Définition :

Une grandeur produit est une grandeur obtenue en effectuant le produit de deux autres grandeurs.

exemples de grandeurs produits:

- aire = longueur $\times$ longueur (en km^2 , m^2 ...)
- volume = longueur $\times$ longueur$\times$ longueur (en m^3 , cm^3 ...)
- énergie = puissance $\times$ temps (en watts-heures ou Wh, kWh....)

B. Grandeurs quotients, grandeurs produits

Définition :

Une grandeur quotient est une grandeur obtenue en effectuant le quotient de deux autres grandeurs.

exemples de grandeurs quotients :

- vitesse $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ (en km/h, m/s...)
- débit $= \dfrac{\text{volume}}{\text{temps}}$ (en m^3/s, L/min, L/s...)
- densité $= \dfrac{\text{nombre d'habitants}}{\text{superficie}}$ (en habitants/km^2, habitants/m^2...)
- masse volumique $= \dfrac{\text{masse}}{\text{volume}}$ (en kg/m^3)
- prix au kg $= \dfrac{\text{prix}}{\text{masse}}$ (en €/kg)

Définition :

Une grandeur produit est une grandeur obtenue en effectuant le produit de deux autres grandeurs.

exemples de grandeurs produits:

- aire = longueur $\times$ longueur (en km^2 , m^2 ...)
- volume = longueur $\times$ longueur$\times$ longueur (en m^3 , cm^3 ...)
- énergie = puissance $\times$ temps (en watts-heures ou Wh, kWh....)

XIII.Puissances d'exposant entier négatif, écriture scientifique

A.Définition

Définition

a étant un nombre relatif non nul et n un nombre entier positif

a^{-n} est l'inverse de a^n $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

exemples :

$2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

$(-5)^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^3} = \dfrac{1}{-125}$

$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0,01$

Notation

En particulier, l'inverse de a peut se noter $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

B.Puissances de 10 d'exposant entier négatif

Propriété

Pour tout entier n positif, on a

$10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \underbrace{0,00...0}_{\text{n zéros}}1$

exemples :

$10^{-9} = 0,000000001$ (1 milliardième : très petit)

Propriété

Pour tout entier n positif, multiplier par 10^{-n} revient à décaler la virgule de n rang vers la gauche.

exemple :

$17,2 \times 10^{-3} = 0,0172$

Définition

Certaines puissance de 10 d'unités de mesure peuvent s'exprimer à l'aide des préfixes : giga, méga, kilo, milli, micro, nano selon le tableau suivant :

Préfixe	giga	méga	kilo		milli	micro	nano
Symbole	G	M	k		m	µ	n
10^n	10^9	10^6	10^3	$10^0 = 1$	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Nom	milliard	million	millier	unité	millième	millionième	milliardième

exemples :

1 nm = 1 nanomètre = 10^{-9} m

1 µg = 1 microgramme = 10^{-6} g

1 Go = 1 gigaoctet = 10^9 octets

C.Écriture scientifique

1.Définition

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est de la forme

$$a \times 10^n$$

où a est un nombre compris entre 1 et 10 (10 exclu)

exemple :

L'écriture scientifique de :

896 est $8{,}96 \times 10^2$

0,045 est $4{,}5 \times 10^{-2}$

$487{,}5 \times 10^{-5}$ est $(4{,}875 \times 10^2) \times 10^{-5} = 4{,}875 \times 10^{-3}$

2.Intérêt

L'intérêt de la notation scientifique est de donner facilement un ordre de grandeur du nombre.

exemples :

$8{,}96 \times 10^2 \approx 10 \times 10^2 = 10^3$

$3{,}35 \times 10^8 \approx 1 \times 10^8 = 10^8$

$1{,}7 \times 10^{-9} \approx 1 \times 10^{-9} = 10^{-9}$

$7{,}138 \times 10^{-16} \approx 10 \times 10^{-16} = 10^{-15}$

XIV. Théorème de Thalès dans un triangle

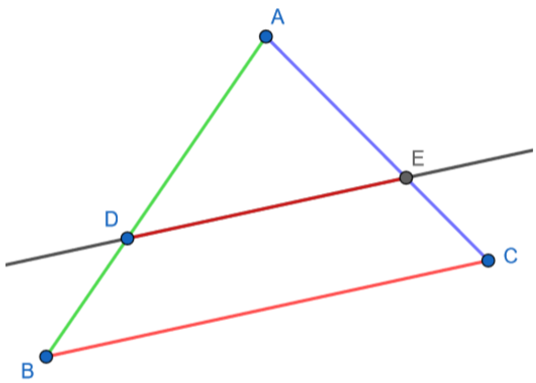
A. Théorème

Théorème de Thalès (admis)

Si on coupe deux côtés d'un triangle par une parallèle au 3e côté alors on forme deux triangles qui ont des côtés de longueurs proportionnelles.

Autrement dit

Dans un triangle ABC, si D ∈ [AB], E ∈ [AC] et si (DE)//(BC) alors $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



remarque

Le triangle ADE est alors une réduction du triangle ABC de rapport $k = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

B. Application au calcul d'une longueur

Énoncé

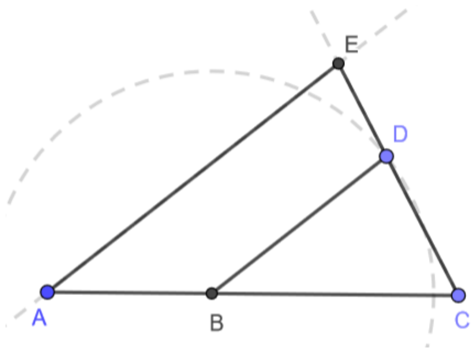
Les droites (BD) et (AE) sont parallèles.

BD = 2,7 cm

BC = 3 cm

AC = 5 cm

Calculer AE.



Modèle de rédaction

Dans le triangle ACE, B ∈ [AC], D ∈ [EC] et (BD)//(AE)

Donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{CB}{CA} = \frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE}$

Cela donne $\frac{3}{5} = \frac{2,7}{AE}$

On a donc, d'après la propriété des produits en croix,

$AE = \frac{5 \times 2,7}{3} = \frac{13,5}{3} = 4,5$ cm

C.Réciproque

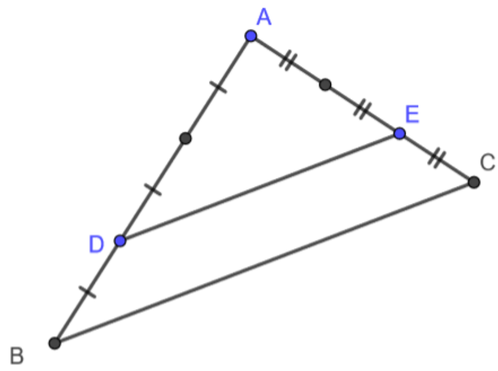
Réciproque du Théorème de Thalès (admise)

Dans un triangle ABC, si D ∈ [AB], E ∈ [AC] et si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ alors (DE)//(BC)

exemple

Sur la figure suivante $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$.

Les droites (DE) et (BC) sont donc parallèles.



remarque

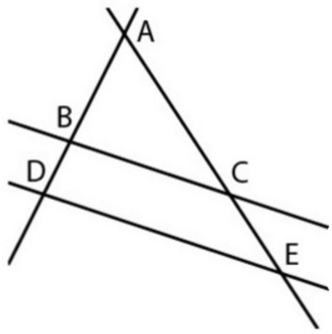
D'après le théorème de Thalès on a donc aussi

$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$

Application

Sur la figure ci-contre (pas à l'échelle), on a AB = 5,4 cm, AD = 7,2 cm, AC = 6,6 cm et AE = 8,8 cm.

Prouver que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.



Modèle de rédaction (à connaître)

Dans le triangle ADE, B ∈ [AD], C ∈ [AE].

De plus $\frac{AB}{AD} = \frac{5,4}{7,2} = 0,75$ et $\frac{AC}{AE} = \frac{6,6}{8,8} = 0,75$

Donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

L'égalité de Thalès est vérifiée, donc (BC) // (DE).

Remarque

Si l'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, on peut conclure que les droites ne sont pas parallèles d'après le théorème de Thalès : si les droites étaient parallèles les quotients devraient être égaux.

On écrira :

Donc $\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$

L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, donc (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

XV.Représentation graphique de grandeurs

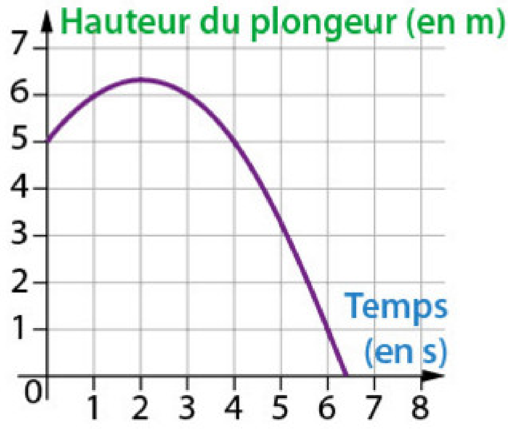
A.Exploiter la représentation graphique d'une grandeur

Méthode

Lorsque l'on dispose de la représentation graphique d'une grandeur B en fonction d'une grandeur A, la grandeur A se lit sur l'axe des abscisses et la grandeur B sur l'axe des ordonnées.

exemple

La courbe ci-contre représente la hauteur d'un plongeur qui saute d'une falaise en fonction du temps.



Hauteur du plongeur au bout de 4 secondes :

....

(On place 4 sur l'axe des abscisses et on lit l'ordonnée du point correspondant C sur la courbe, c'est à dire 5.)

A quel(s) instant(s) le plongeur est-il à 6 m de hauteur ? ....

B.Représenter une grandeur en fonction d'une autre

Méthode

Pour représenter une grandeur en fonction d'une autre, on place les points correspondants sur un graphique.

exemple

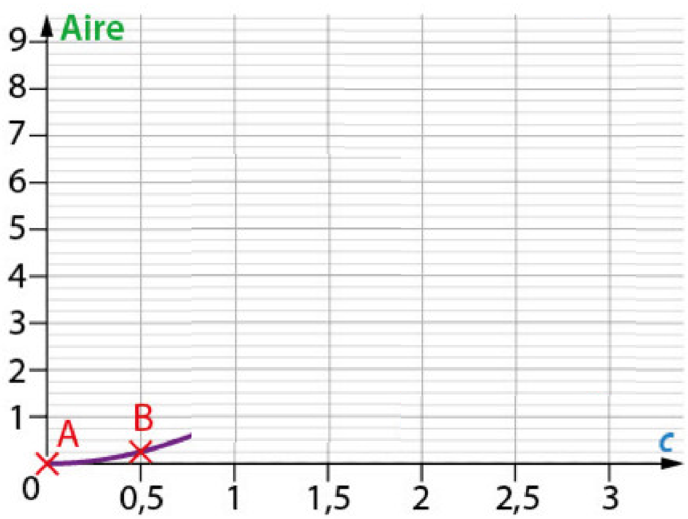
On veut représenter graphiquement l'aire d'un carré en fonction de la longueur c de son côté, donnée par la formule Aire = c^2

On calcule des aires pour différentes valeurs de c, et on construit un tableau de valeurs

c (en cm)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Aire (en cm^2)							
Point	A	B	C	D	E	F	G

Puis on place les points correspondants sur un graphique, avec le côté c en abscisses et l'aire en ordonnées.

Par exemple, à une longueur de 1,5 correspond une aire de 2,25. On place donc le point D de coordonnées (...... ; ......)



On se contente de placer quelques points, puis on complète la courbe selon son allure.

XVI.Calcul littéral: simplifier, développer

A.Simplifier une expression littérale

Définition

Une expression littérale est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.

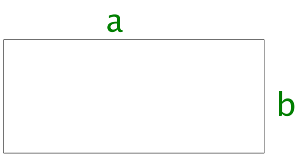
exemples :

a) Le périmètre du rectangle est

$P = 2 \times a + 2 \times b$

ou

$P = 2 \times (a + b)$



b) L'aire du rectangle est

$\mathcal{A} = a \times b$

c) Programme de calcul

Je choisis un nombre.
Je le multiplie par 3.
Puis je lui ajoute 5.

Si on appelle x le nombre de départ, le résultat obtenu s'écrit $3 \times x + 5$

Convention d'écriture

Dans une expression littérale, on peut supprimer le signe $\times$ lorsqu'il est placé devant une lettre ou devant une parenthèse

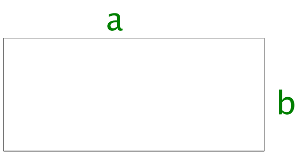
exemples :

a) Le périmètre du rectangle est

$P = 2a + 2b$

ou

$P = 2(a + b)$



b) L'aire du rectangle est $\mathcal{A} = ab$

c) $3 \times x + 5 = 3x + 5$

Cas particuliers

$1 \times a = a$	plutôt que 1a
$0 \times a = 0$	plutôt que 0a
$a \times a = a^2$	qui se lit « a au carré »
$a \times a \times a = a^3$	qui se lit « a au cube»

Propriété

Pour simplifier un produit de plusieurs facteurs, on peut modifier l'ordre des facteurs

exemples :

$C = 2 \times b \times 7$
$C = 2 \times 7 \times b$
$C = 14 \times b$
$C = 14b$

$D = -8x^2 \times 3x$
$D = -8 \times x^2 \times 3 \times x$
$D = -8 \times 3 \times x^2 \times x$
$D = -24x^3$

B.Développer un produit

Définition

Développer, c'est transformer un produit en somme ou en différence

Propriété (distributivité)

k, a et b étant des nombres relatifs quelconques

$$\boxed{k(a + b) = ka + kb}$$

produit → somme
développer

$$\boxed{k(a - b) = ka - kb}$$

produit → différence
développer

exemples :

Développer E = $3\,(x - 7)$

E = $3 \times (x - 7)$

E = $3 \times x - 3\times7$

E = $3x - 21$

On peut passer mentalement directement de l'expression à sa forme développée

Développer F = $-5\,(x - 7)$

F = $-5 \times (x - 7)$

F = $-5 \times x - (-5)\times7$

F = $-5x + -(-35)$

F = $-5x + 35$

On peut passer mentalement directement de l'expression à sa forme développée en distribuant les signes (− fois +, puis − fois −)

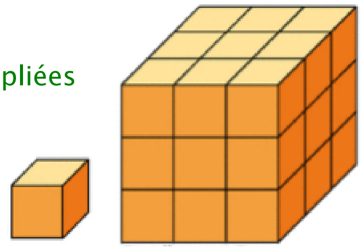
XVII. Effet de l'agrandissement-réduction sur les aires et les volumes

Propriété (admise)

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- Les aires sont multipliées par k^2
- Les volumes sont multipliés par k^3

exemple 1 :



Dans un agrandissement de rapport 3, les longueurs sont multipliées par ……, les aires par ………………, les volumes par ………………

Dans une réduction de rapport $\frac{1}{4}$, les longueurs sont multipliées par ……, les aires par ………………, les volumes par ………………

exemple 2 :

Le volume d'une piscine est de 24 m^3.

On crée une maquette de cette piscine à l'échelle $\frac{1}{10}$.

Quel est le volume de la maquette ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

exemple 3 :

On multiplie par 1,5 les longueurs d'un enclos d'aire 20 m^2.
Quelle est l'aire du nouvel enclos ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

XVIII.Effet d'une translation d'une figure

Description

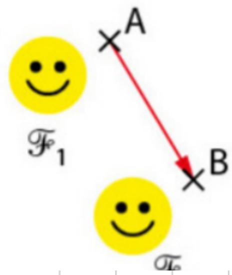
Transformer une figure par translation, c'est la faire glisser sans la tourner.

Propriété

Une translation est définie par :

- une direction
- un sens
- une longueur

et peut être représentée par une flèche.



Vocabulaire

On dit que la figure $(\mathcal{F}_2)$ est l'image de la figure $(\mathcal{F}_1)$ par la translation qui transforme A en B.

exemple :

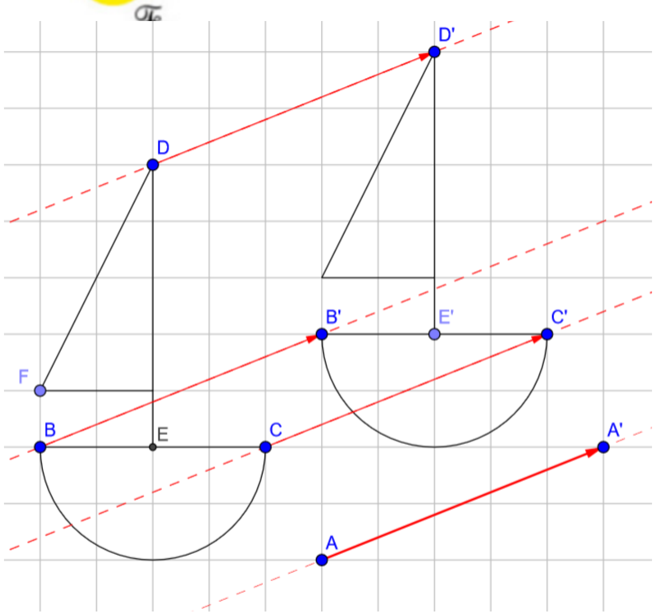
Dans la translation qui transforme le point A en A' :

– la direction est donnée par la droite (AA')

– le sens est donné par la flèche qui va de A vers A'

– la longueur est donnée par la longueur AA'

Compléter l'image de la figure bateau par cette translation.



Propriété (admise)

Une figure et son image par une translation sont superposables.

Propriété (admise)

La translation conserve les alignements, les angles, les longueurs et les aires.

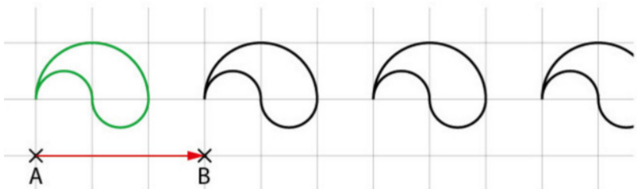
exemple :

Les points B, E et C sont alignés donc les points B', E' et C' sont aussi alignés.

Les angles $\widehat{EDF}$ et $\widehat{E'D'F'}$ ont la même mesure.

Définition

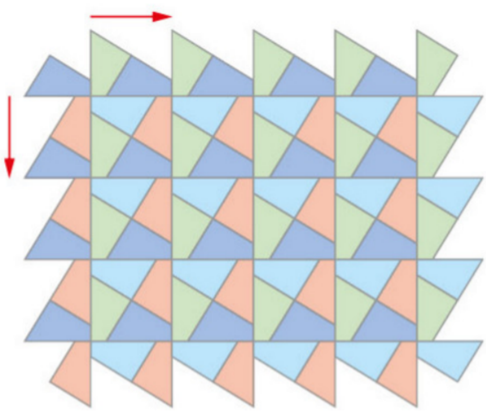
Une frise est constituée d'un motif qui est reproduit dans une seule direction par une même translation.



Motif :

Définition

Un pavage est constitué d'un motif qui est reproduit dans deux directions par translations et qui recouvre le plan sans trous ni superpositions.



Motif :

XVII.Effet d'une translation d'une figure

Description

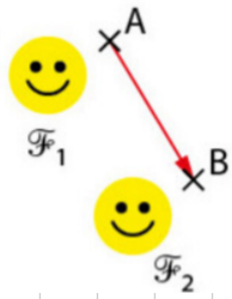
Transformer une figure par translation, c'est la faire glisser sans la tourner.

Propriété

Une translation est définie par :

- une direction
- un sens
- une longueur

et peut être représentée par une flèche.



Vocabulaire

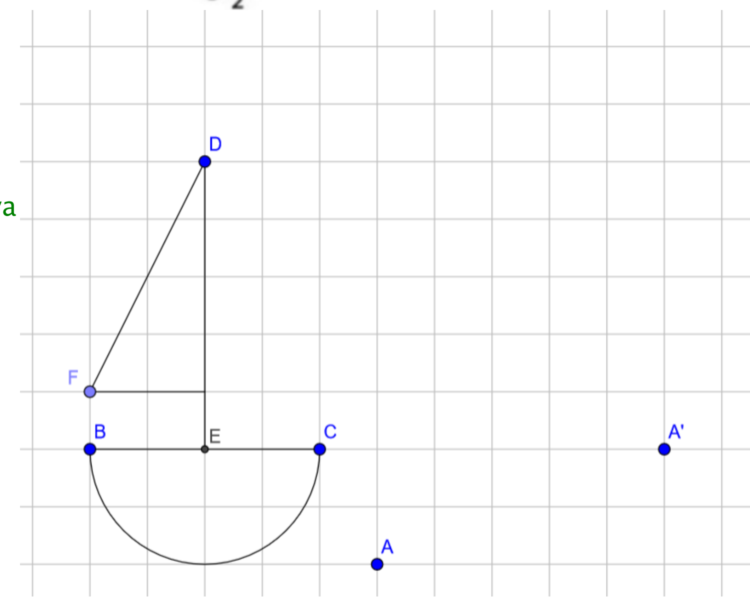
On dit que la figure $(\mathcal{F}_2)$ est l'image de la figure $(\mathcal{F}_1)$ par la translation qui transforme A en B.

exemple :

Dans la translation qui transforme le point A en A' :

- la direction est donnée par la droite (AA')
- le sens est donné par la flèche qui va de A vers A'
- la longueur est donnée par la longueur AA'

Compléter l'image de la figure bateau par cette translation.



Propriété (admise)

Une figure et son image par une translation sont superposables.

Propriété (admise)

La translation conserve les alignements, les angles, les longueurs et les aires.

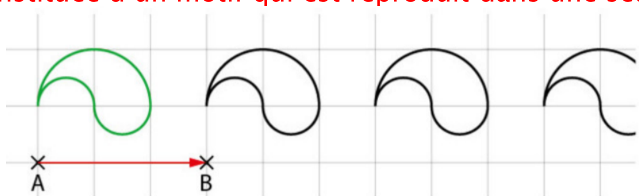
exemple :

Les points B, E et C sont alignés donc les points B', E' et C' sont aussi alignés.

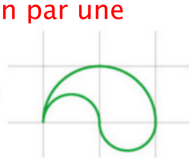
Les angles $\widehat{EDF}$ et $\widehat{E'D'F'}$ ont la même mesure.

Définition

Une frise est constituée d'un motif qui est reproduit dans une seule direction par une même translation.

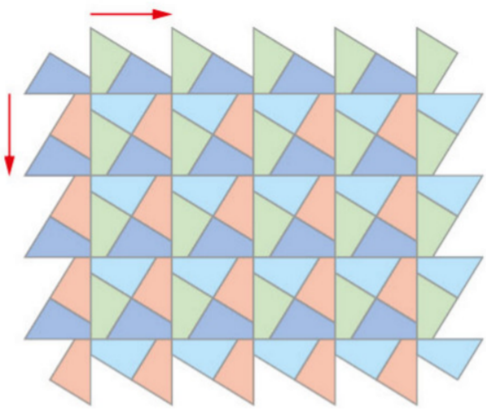


Motif :



Définition

Un pavage est constitué d'un motif qui est reproduit dans deux directions par translations et qui recouvre le plan sans trous ni superpositions.



Motif :

XIX.Calcul littéral: factoriser, réduire, suppression de parenthèses

A.Factoriser une somme ou une différence

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en produit

Propriété (distributivité)

k, a et b étant des nombres relatifs quelconques

$\boxed{ka + kb = k(a + b)}$ $\boxed{ka - kb = k(a - b)}$

somme → produit on factorise

différence → produit on factorise

Méthode

Pour factoriser une expression il faut

- trouver un facteur commun
- mettre ce nombre en facteur en utilisant la distributivité

exemples :

Factoriser $A = 7x - 2x$
(on reconnaît x comme facteur commun)
$A = 7\times x - 2\times x$
(on met x en facteur)
$A = x\times(7-2)$
$A = 5x$

Factoriser $B = 3x - 24$
(on reconnaît 3 comme facteur commun)
$B = 3\times x - 3\times 8$
(on met 3 en facteur)
$B = 3(x - 8)$

Factoriser $C = 5x^2 + 15x$
(on reconnaît $5x$ comme facteur commun)
$C = 5x\times x + 5x\times 3$
(on met $5x$ en facteur)
$C = 5x(x + 3)$

B.Réduire une expression

Définition

Réduire une expression littérale, c'est ajouter ou factoriser ensemble les termes pour lequel c'est possible.

exemples :

Réduire $D = 3a + 1 + 4a - 3 + 2a$

on ajoute mentalement ensemble en tenant compte des signes les termes en a et les termes constants (les entourer en couleurs) $D = 3a + 1 + 4a - 3 + 2a$

$D = 9a - 2$

Réduire $E = 5x^2 + 8x - 7 - 3x^2 + 4x - 3$

on ajoute mentalement ensemble en tenant compte des signes les termes en x^2 puis les termes en x puis les termes constants (les entourer en couleurs)
$E = 5x^2 + 8x - 7 - 3x^2 + 4x - 3$

$E = 2x^2 + 12x - 10$

C.Expressions littérales et suppression de parenthèses

Propriété

Pour ajouter une somme entre parenthèses on peut distribuer le signe + en utilisant la règle des signes.

a + (b + c) = a + b + c	a + (b − c) = a + b − c
a + (−b + c) = a − b + c	a + (−b − c) = a − b − c

remarque :

Cela revient à supprimer les parenthèses sans changer les signes à l'intérieur.

exemple :

$C = 6 + (5 - 3x)$ (on supprime les parenthèses sans changer les signes intérieurs)

$C = 6 + 5 - 3x$ (et on réduit)

$C = 11 - 3x$

Propriété

Pour soustraire une somme entre parenthèses, on peut distribuer le signe − en utilisant la règle des signes.

a − (b + c) = a − b − c	a − (b − c) = a − b + c
a − (−b + c) = a + b − c	a − (−b − c) = a + b + c

remarque :

Cela revient à supprimer les parenthèses en changeant les signes à l'intérieur.

exemple :

$D = 8 - (-2x + 3)$ (on distribue le signe − : − fois − donne + et − fois + donne −)

$D = 8 + 2x - 3$ (et on réduit)

$D = 5 + 2x$

XX.Proportionnalité et représentation graphique

Propriété 1

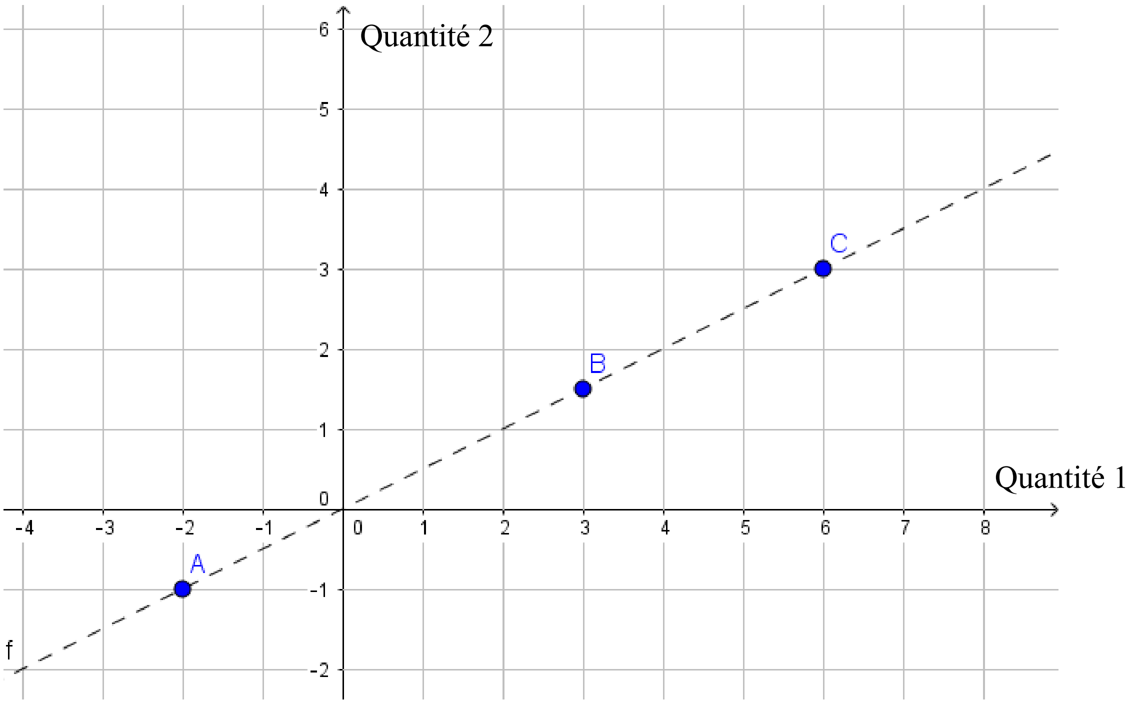
Si deux grandeurs sont proportionnelles alors elles sont représentées par des points alignés avec l'origine du repère.

exemple

Quantité 1	−2	3	6
Quantité 2	−1	1,5	3

× 0,5

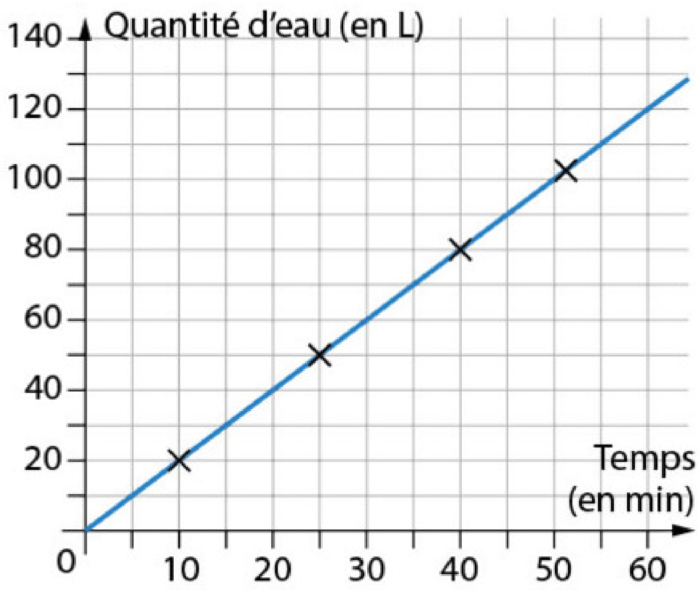
Les quantités sont proportionnelles, donc on aura trois points alignés avec l'origine.



Propriété 2

Si deux grandeurs sont représentées par des points alignés avec l'origine du repère alors elles sont proportionnelles.

exemple :



Le graphique nous indique que la quantité d'eau qui coule d'un robinet est proportionnelle au temps.

XIX. Proportionnalité et représentation graphique

Propriété 1

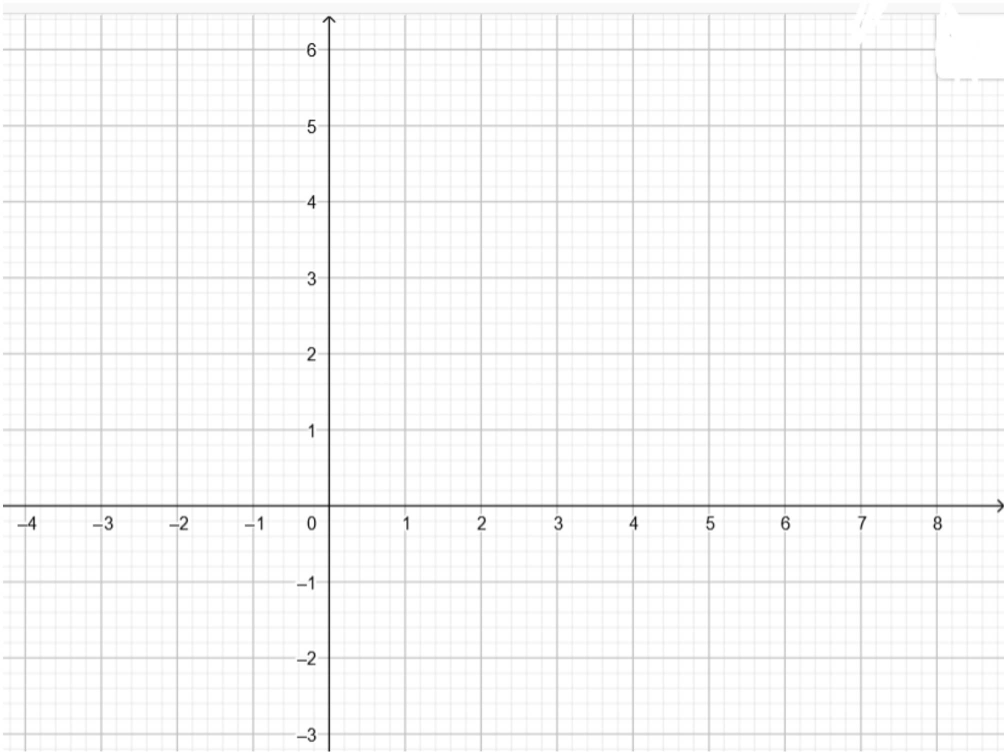
Si deux grandeurs sont proportionnelles alors elles sont représentées par des points alignés avec l'origine du repère.

exemple

Grandeur 1	−2	3	6
Grandeur 2	−1	1,5	3

× 0,5

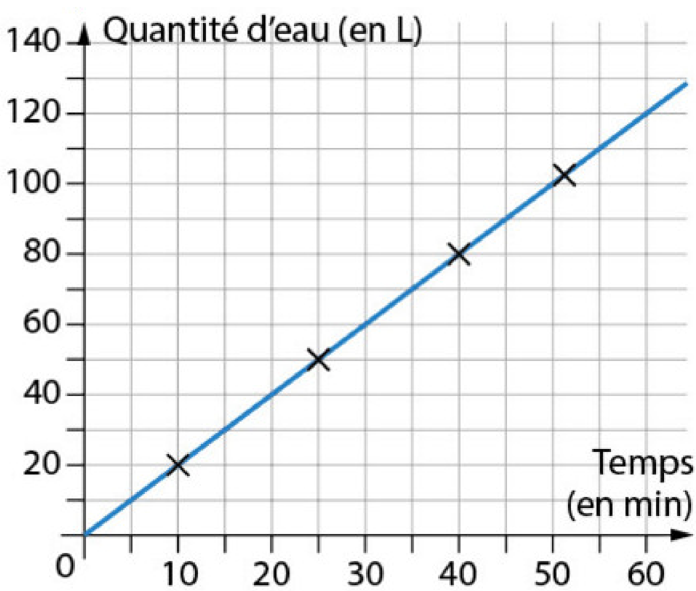
Les grandeurs sont proportionnelles, donc on aura trois points alignés avec l'origine.



Propriété 2

Si deux grandeurs sont représentées par des points alignés avec l'origine du repère alors elles sont proportionnelles.

exemple :



Le graphique nous indique que la quantité d'eau qui coule d'un robinet est proportionnelle au temps.

XXI.Racine carrée d'un nombre positif

A.Définition

Définition

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est égal à a.
Elle est notée $\sqrt{a}$ et se lit « racine carrée de a »

exemple :

$\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$

$\sqrt{12} \approx 3{,}464$ car $3{,}464^2 = 11{,}999296 \approx 12$

remarque :

Beaucoup de racines carrées ne sont pas des nombres décimaux ni rationnels (on ne peut les écrire ni sous forme décimale ni comme une fraction).

On peut en trouver une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

B.Carrés parfaits

Définition

Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

exemples :

Liste des 12 premiers carrés parfaits, à connaître

carré

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121

racine carrée

Application

D'après le tableau on voit que $5 < \sqrt{30} < 6$ puisque $5^2 = 25$ et $6^2 = 36$

$8 < \sqrt{70} < 9$ puisque $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$

XXII.Le théorème de Pythagore

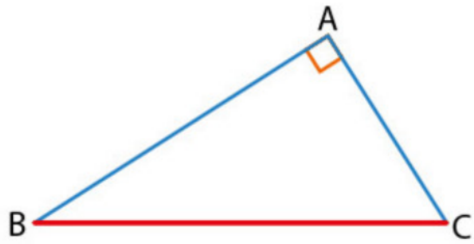
A.Énoncé

Définition et propriété

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est le plus grand des trois côtés. On l'appelle l'hypoténuse du triangle.

exemple

Dans un triangle ABC rectangle en A, l'hypoténuse [BC] est le plus grand côté.



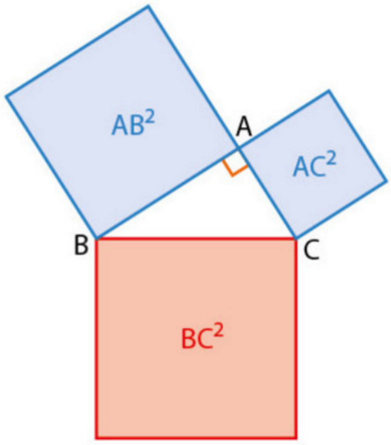
Théorème de Pythagore (admis)

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

exemple

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

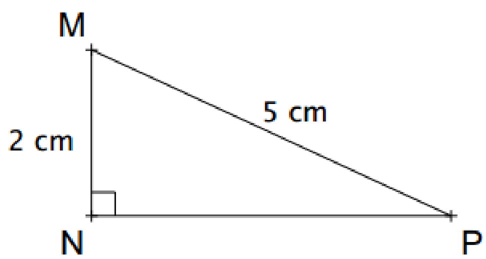


B.Calculer une longueur à l'aide du théorème de Pythagore

Si on connaît les longueurs de 2 côtés au choix d'un triangle rectangle, alors on peut calculer la longueur du 3e.

Énoncé

Calculer une valeur approchée (au mm près) de NP



Modèle de rédaction

Le triangle MNP est rectangle en N.

Donc, d'après le théorème de Pythagore,

$MP^2 = MN^2 + NP^2$

d'où $5^2 = 2^2 + NP^2$

$25 = 4 + NP^2$

$NP^2 = 25 - 4$

$NP^2 = 21$

donc $NP = \sqrt{21}$ cm (valeur exacte)

$NP \approx 4{,}6$ cm (arrondi au millimètre).

XXIII. Équations

A. Définition et vocabulaire

Définition

Une **équation** est une égalité comportant un nombre désigné par une lettre et appelé **inconnue**.

exemple :

$3 + x = 11$ est une **équation d'inconnue** x

Si $x = 8$, cette égalité est vraie car $3 + 8 = 11$

Si $x = 4$, cette égalité est fausse car $3 + 4 = 7 \neq 11$

Définition

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

exemple :

Résoudre l'équation $3x + 5 = 2x + 1$, c'est trouver la (ou les) valeurs de x telle(s) que les deux membres $3x + 5$ et $2x + 1$ soient égaux.

Testons si -2 ou -4 sont des solutions

- Pour $x = -2$

$3x + 5 = 3 \times (-2) + 5 =$ ....

$2x + 1 =$ ....

Les valeurs des 2 membres sont différentes, donc -2 ....

- Pour $x = -4$

$3x + 5 =$ ....

$2x + 1 =$ ....

Les valeurs des 2 membres sont égales, donc -4 ....

B. Méthode de résolution d'une équation

1. Propriétés

Propriété 1

Une égalité reste vraie (ou fausse) si on ajoute ou si on soustrait le même nombre à chacun de ses membres .

exemple :

Résoudre l'équation $x - 7 = 2$

revient à résoudre $x - 7 + 7 = 2 + 7$

donc à résoudre $x = 9$ (on s'est débarrassé du -7 dans le 1er membre)

La solution de l'équation de départ est donc 9.

Résoudre l'équation $5 + x = 1$

revient à résoudre $5 + x - 5 = 1 - 5$ (on se débarrasse du 5 dans le 1er membre)

donc à résoudre $x = -4$

La solution de l'équation est -4.

Propriété 2

Une égalité reste vraie (ou fausse) si on multiplie ou si on divise chacun de ses membres par le même nombre non nul.

exemple :

Résoudre l'équation $\frac{x}{2} = 5$

revient à résoudre $\frac{x}{2} \times 2 = 5 \times 2$ (on se débarrasse du dénominateur 2 dans le 1er membre)

donc à résoudre $x = 10$

La solution de l'équation est 10.

Résoudre l'équation $3x = -1$

revient à résoudre $\frac{3x}{3} = \frac{-1}{3}$ (on se débarrasse du facteur 3 dans le 1er membre)

donc à résoudre $x = -\frac{1}{3}$

La solution de l'équation est $-\frac{1}{3}$.

2.Méthode générale

Méthode

Pour résoudre une équation, on la transforme, étape par étape, en une équation plus simple qui a les mêmes solutions, en utilisant les propriétés précédentes.

exemple :

$5x - 5 = 3x - 10$

$5x - 5 - 3x = 3x - 10 - 3x$ *(on ajoute $-3x$ aux deux membres pour se débarrasser du $3x$ à droite)*

$2x - 5 = -10$ *(on réduit les deux membres)*

$2x - 5 + 5 = -10 + 5$ *(on ajoute 5 aux deux membres pour se débarrasser du -5 à gauche)*

$2x = -5$ *(on réduit les deux membres)*

$\frac{2x}{2} = \frac{-5}{2}$ *(on divise par 2 les deux membres pour se débarrasser du facteur 2)*

$x = -2{,}5$ *(on réduit les deux membres)*

La solution de l'équation est $-2{,}5$

C.Résolution d'un problème par mise en équation

Étapes

1. On choisit ce que va désigner l'inconnue x
2. On traduit les données du problème en fonction de x pour aboutir à une équation
3. On résout l'équation
4. On interprète le résultat

exemple

Trois bâtons mesurent ensemble 3,7 m. Le deuxième mesure 1,2 m de plus que le premier. Le troisième mesure 0,5 m de moins que le premier. Combien mesure le premier bâton ?

Résolution du problème

1. On appelle x la longueur du premier bâton en m
2. Longueur du 2e bâton en m : $x + 1{,}2$

   Longueur du 3e bâton en m : $x - 0{,}5$

   La longueur des 3 bâtons est égale à 3,7 m, mais aussi à $x + x + 1{,}2 + x - 0{,}5$

   On doit donc avoir

$$x + x + 1{,}2 + x - 0{,}5 = 3{,}7$$

3.
$$3x + 0{,}7 = 3{,}7$$
$$3x + 0{,}7 - 0{,}7 = 3{,}7 - 0{,}7$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$
$$x = 1$$

4. Le premier bâton mesure 1 m.

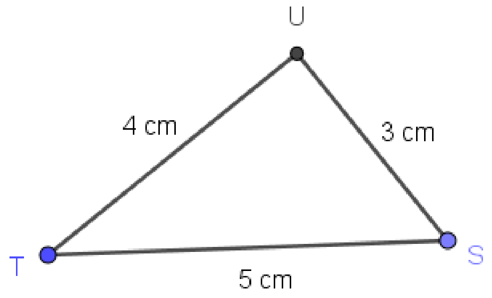
XXIV.Reconnaître un triangle rectangle

A.Réciproque du théorème de Pythagore

Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des 2 autres côtés alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse le grand côté.

exemple



car

$SU^2 + UT^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Remarque

On dit que l'égalité de Pythagore est une propriété caractéristique du triangle rectangle : tous les triangles rectangles vérifient l'égalité et tous les triangles qui vérifient l'égalité sont rectangles .

B.Application : prouver qu'un triangle est rectangle ou non

Propriété

Soit ABC un triangle dont le plus grand côté est [BC].

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle

Énoncé

Soit SUT un triangle tel que : SU = 8 cm, UT = 10 cm et ST = 6 cm

SUT est-il rectangle ?

Modèle de rédaction

D'une part

$UT^2 = 10^2 = 100$ (Le plus grand côté est [UT])

D'autre part

$SU^2 + ST^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

Donc $UT^2 = SU^2 + ST^2$

L'égalité de Pythagore est vérifiée donc le triangle SUT est rectangle en S.

Énoncé

Soit IKJ un triangle tel que : IJ = 7 cm, JK = 4 cm et IK = 8 cm

IJK est-il rectangle ?

Modèle de rédaction

D'une part

$IK^2 = 8^2 = 64$ (Le plus grand côté est [IK])

D’autre part

$IJ^2 + JK^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65$

Donc $IK^2 \neq IJ^2 + JK^2$

L'égalité de Pythagore n’est pas vérifiée donc le triangle IJK n’est pas rectangle.

XXV.Moyenne pondérée, médiane, étendue

A.Moyenne pondérée

Définition

La moyenne pondérée d'une série de données numériques est égale à la somme des produits de chaque donnée par son effectif, divisé par l'effectif total

$$\text{Moyenne pondérée} = \frac{\text{somme des produits des données par leur effectif}}{\text{effectif total}}$$

exemple :

Nombre moyen de frères et sœurs par élève dans le collège ?

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif (nombre d'élèves)	70	160	80	32	15

Réponse :

Il s'agit d'une moyenne pondérée par le coefficient « Effectif (nombre d'élèves) »

$$\text{Moyenne pondérée} = \frac{....\times....+....\times....+....\times....+....\times....+....\times....}{....+....+....+....+....} \approx 1{,}33$$

Chaque élève a en moyenne environ .... frères et sœurs

B.Médiane

Définition

Dans une série ordonnée de données numériques, on appelle médiane un nombre qui partage cette série ordonnée en deux séries de même effectif.

Propriété

La moitié (au moins) des données sont inférieures où égales à la médiane et la moitié (au moins) des données sont supérieures ou égales à la médiane.

exemple :

L'effectif de la série est **impair**.

$$\underbrace{8 \quad 11 \quad 12}_{\text{3 données}} \quad \underset{\text{médiane}}{13} \quad \underbrace{15 \quad 17 \quad 19}_{\text{3 données}}$$

La médiane de cette série est 13.
Cela signifie qu'il y a autant de données inférieures ou égales à 13 que de données supérieures ou égales à 13.

L'effectif de la série est **pair**.

$$\underbrace{2 \quad 7 \quad 10}_{\text{3 données}} \quad \underset{\text{médiane}}{\uparrow} \quad \underbrace{11 \quad 14 \quad 19}_{\text{3 données}}$$

Tout nombre compris entre 10 et 11 partage la série en deux séries de même effectif.
En pratique, on prend pour médiane la valeur centrale.
Dans cet exemple, on prend donc pour médiane 10,5. Cela signifie qu'il y a autant de valeurs inférieures à 10,5 que de valeurs supérieures à 10,5.

remarque : La médiane ne dépend pas des données extrêmes de la série.

C.Étendue

Définition

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur de la série et la plus petite.

Exemples :

L'étendue de la série 23, 36, 43, 88, 61, 122, 34, 77 est $122 - 23 = 99$

XXIV. Moyenne pondérée, médiane, étendue

A. Moyenne pondérée

Définition

La moyenne pondérée d'une série de données numériques est égale à la somme des produits de chaque donnée par son effectif, divisée par l'effectif total.

$$\text{Moyenne pondérée} = \frac{\text{somme des produits des données par leur effectif}}{\text{effectif total}}$$

exemple :

Nombre moyen de frères et sœurs par élève dans le collège ?

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif (nombre d'élèves)	70	160	80	32	15

Réponse :

Il s'agit d'une moyenne pondérée par le coefficient « Effectif (nombre d'élèves) »

$$\text{Moyenne pondérée} = \frac{0\times70+1\times160+2\times80+3\times32+4\times15}{70+160+80+32+15} = \frac{476}{357} \approx 1{,}33$$

Chaque élève a en moyenne environ 1,33 frères et sœurs.

B. Médiane

Définition

Dans une série ordonnée de données numériques, on appelle médiane un nombre qui partage cette série ordonnée en deux séries de même effectif.

Propriété

La moitié (au moins) des données sont inférieures où égales à la médiane et la moitié (au moins) des données sont supérieures ou égales à la médiane.

exemple :

La médiane de la série **1 ; 2 ; 4 ; 20 ; 110** est 4.

6 et 7 seraient deux médianes possibles pour la série **2 ; 5 ; 9 ; 21**

En pratique

Pour déterminer une médiane, on commence par ranger les données dans l’ordre croissant, puis on prend pour médiane :

- la donnée centrale si l'effectif est impair
- la moyenne des deux données centrales si l'effectif est pair

exemples :

1) Série : **34 ; 19 ; 12 ; 51 ; 48 ; 90 ; 39**

Série ordonnée : **12 ; 19 ; 34 ; 39 ; 48 ; 51 ; 90**

L'effectif est impair : 7 = 3 + 1 + 3 , donc la médiane est la 4^{e} valeur. La médiane est 39

2) Série : **12 ; 19 ; 39 ; 39 ; 45 ; 48 ; 51 ; 90** La série est ordonnée.

L'effectif est pair : 8 = 4 + 4 , donc la médiane est la moyenne des 4^{e} et 5^{e} valeurs.

La médiane est $\frac{39+45}{2} = 42$

remarque : La médiane ne dépend pas des données extrêmes de la série.

C.Étendue

Définition

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur de la série et la plus petite.

Exemples :

L'étendue de la série **23 ; 36 ; 43 ; 88 ; 61 ; 122 ; 34 ; 77** est 122 – 23 = 99

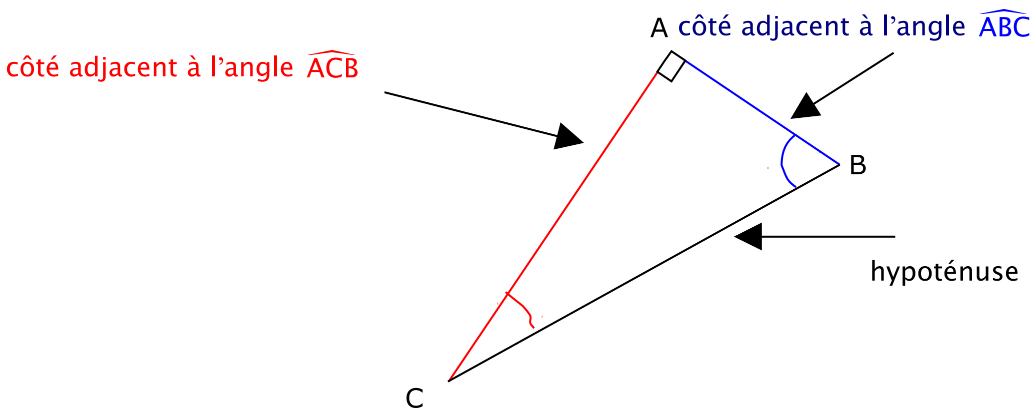
XXVI.Cosinus dans un triangle rectangle

A.Vocabulaire

Définition

Dans un triangle ABC rectangle en A, on dit que :

- [AC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$
- [AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$
- [BC] est l'hypoténuse



B.Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Propriété (admise)

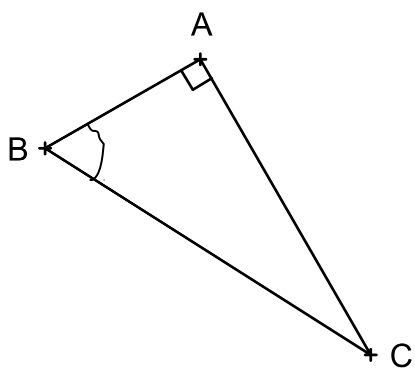
Dans un triangle rectangle, le quotient $\dfrac{\text{longueur du côté adjacent à un angle aigu}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$ ne dépend que de la mesure de cet angle.

Définition

Dans un triangle rectangle,

$$\text{cosinus d'un angle aigu} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

exemple :



Dans le triangle ABC rectangle en A, le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ est égal à $\dfrac{AB}{BC} \approx \dfrac{....}{....} \approx ......$

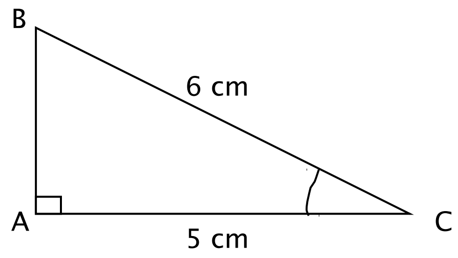
Notation :

On écrit $\boxed{\cos\ \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}}$

remarque

Le cosinus d'un angle est toujours compris entre 0 et 1 (car l'hypoténuse est toujours le plus grand côté).

C. Calculer la mesure d'un angle à l'aide du cosinus



Énoncé

Donner une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

Modèle de rédaction

Dans le triangle ABC rectangle en A,

$\cos \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$

d'où $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{5}{6}$

Donc $\widehat{ACB} \approx 33{,}6°$ en tapant $\arccos\left(\dfrac{5}{6}\right)$ à la calculatrice

XXVII.Probabilités

A. Modéliser une expérience aléatoire

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance.

exemple

Je lance un dé à 6 faces, puis je regarde le résultat obtenu.

Définition

Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé une issue.

exemple

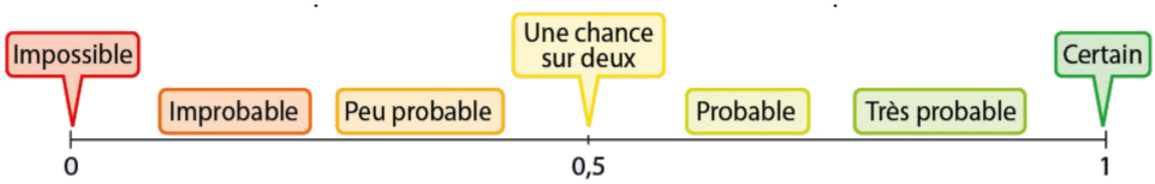
Il y a 6 issues : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6

Définition

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer une probabilité à chaque issue de sorte que :

– la probabilité d'une issue soit un nombre compris entre 0 et 1, qui peut s'interpréter comme la « proportion de chances » d'obtenir cette issue

– la somme des probabilité de toutes les issues soit égale à 1



exemple

Il y a autant de chances d'obtenir les 6 issues si le dé est équilibré, et la somme des probabilités doit être égale à 1, donc la probabilité de chaque issue sera donc $\frac{1}{6}$.

Définition

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les issues sont équiprobables.

exemple

Lorsqu'on lance un dé cubique équilibré, les issues sont équiprobables.

B.Probabilité d'un événement

Définition

Un événement est un ensemble d'issues. On peut le décrire par une phrase ou en donnant la liste de ses issues

Dans une expérience aléatoire, on dit qu'un événement est réalisé si l'on a obtenu l'une des ses issues.

exemple

L'événement « J'obtiens un nombre impair » est réalisé par les issues 1 ; 3 et 5.

Propriété (admise)

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Si A est un événement, on notera P(A) (« P de A ») la probabilité de cet événement.

exemple

P(« J'obtiens un nombre impair ») $= P(1) + P(2) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Propriété (admise)

Si les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables, alors la probabilité d'un événement A est

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables (qui réalisent l'événement)}}{\text{nombre total d'issues}}$$

exemples

Dans un lancé de dé non truqué, chacune des 6 issues à la même probabilité , et l'événement B : « on obtient au moins 5 » est réalisé par les 2 issues 5 et 6

$$\text{Donc } p(B) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Attention

Si les issues n'ont pas la même probabilité, on ne peut pas appliquer la formule.

C.Événements impossibles, certains, contraires

Définition

Un événement impossible est un événement qui ne peut jamais se réaliser, quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire.

Définition

Un événement certain est un événement qui se réalise toujours, quel que soit le résultat de l'expérience aléatoire.

exemples :

On lance un dé à six faces.

L'événement « Obtenir 7 » est un événement impossible.

L'événement « Obtenir un nombre inférieur à 10 » est un événement certain.

Propriétés

La probabilité d'un événement impossible est égal à 0.

La probabilité d'un événement certain est égale à 1.

Définition

L'événement contraire d'un événement A est l'événement qui est réalisé par toutes les issues qui ne réalisent pas A. Cet événement est noté $\overline{A}$.

exemple :

On tire au hasard une boule dans un sac contenant des boules bleues, rouges et vertes.

L'événement contraire de l'événement A « Obtenir une boule bleue », est l'événement $\overline{A}$ « Ne pas obtenir une boule bleue », c'est à dire « Obtenir une boule rouge ou verte ».

Propriété

Si A désigne un événement, alors

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

d'où

P(

$\overline{A}$) = 1 – P(A)

exemple :

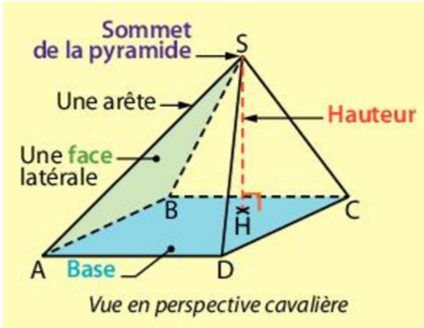
On lance une pièce de monnaie truquée telle que P(Face) = 0,55.

Alors P(Pile) = $P(\overline{\text{Face}})$ = 1 – P(Face) = 1 – 0,55 = 0,45

XXVIII.Pyramides et cônes de révolution

A.Pyramide

1.Définition et vocabulaire



Définition

Une pyramide est un solide constitué :

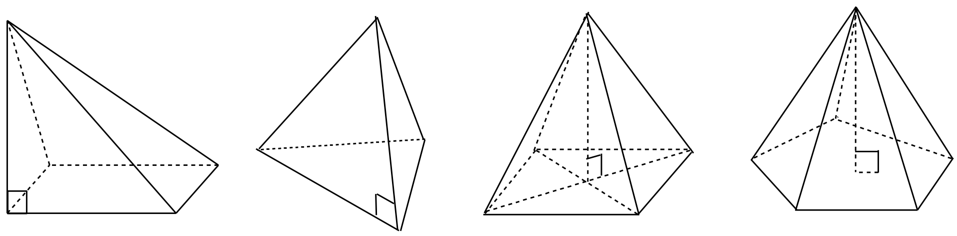
- d'une face polygonale : la base
- de faces triangulaires : les faces latérales,

  ayant un sommet commun : le sommet de la pyramide)

Définition

La hauteur d'une pyramide est la longueur du segment joignant perpendiculairement la base et le sommet.

exemples :



Pour chaque pyramide, j'ai

- placé son sommet S;
- colorié en bleu le segment qui mesure sa hauteur;
- colorié en rouge, le polygone représentant sa base.

2.Patron d'une pyramide

Faire une figure à main levée du patron de cette pyramide inscrite dans un cube d’arête 5 cm, puis construire en vraie grandeur cette pyramide.

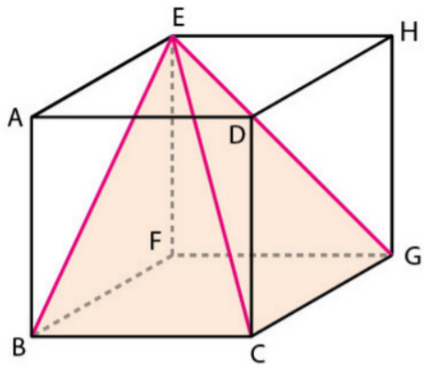


Figure à main levée du patron

B.Cône de révolution

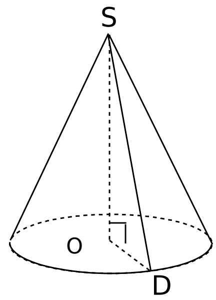
1.Définition et vocabulaire

<u>Définition</u>

Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

<u>exemple</u> :

Le <u>cône de révolution</u> ci-contre est obtenu en faisant tourner le triangle .... rectangle en .... autour du côté ....



Sa <u>hauteur</u> est la longueur du segment ....

Sa <u>base</u> est le .... de centre .... et de rayon ....

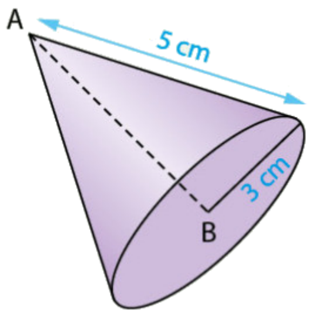
Le segment [SD] est appelé .... du cône de révolution.

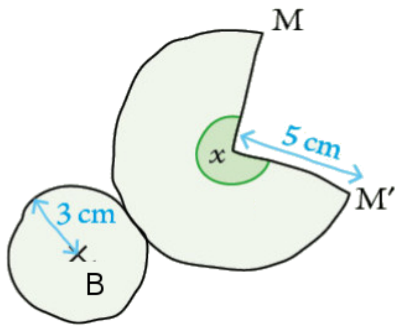
2.Patron d'un cône de révolution

Tracer puis découper le patron d'un cône de révolution dont la génératrice mesure 5 cm et dont la base a pour rayon 3 cm.

<u>Vue en perspective</u>

<u>Patron à main levée</u>





<u>Calcul de l'angle x</u>

L'angle x est proportionnel à la longueur de l'arc de cercle qui relie M à M'

Mesure de l'angle, en °	360	x
Longueur de l'arc, en cm	....	....

Donc x = ...

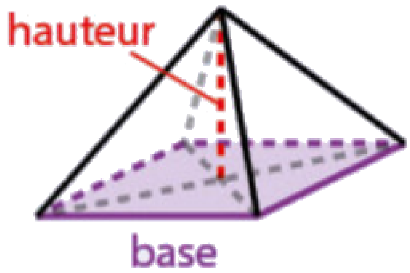
<u>Patron en taille réelle</u>

XXIX.Volume d'une pyramide, d'un cône de révolution

A.Volume d'une pyramide

Propriété

$$\text{Volume d'une pyramide} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$



exemple :

Volume d'une pyramide de hauteur 8 cm et de base rectangulaire de longueur 10 cm et de largeur 5 cm, en cm^3 :

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$V = \frac{5 \times 10 \times 8}{3}$$

$$V = \frac{80}{3} \quad \text{(valeur exacte)}$$

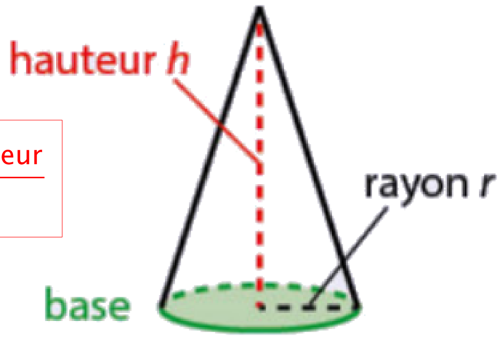
$$V \approx 26{,}66 \quad \text{(valeur approchée au centième près)}$$

La pyramide a un volume d'environ 26,66 cm^3.

B.Volume d'un cône de révolution

Propriété

$$\text{Volume d'un cône de révolution} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$



si la base a pour rayon r, on obtient la formule

$$\text{Volume d'un cône de révolution} = \frac{\pi \times r^2 \times \text{hauteur}}{3}$$

exemple :

Volume d'un cône de révolution de hauteur 5 m et de base de rayon 3 m, en m^3 :

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times \text{hauteur}}{3}$$

$$V = \frac{\pi \times 3^2 \times 5}{3}$$

$$V = 15\,\pi \quad \text{(valeur exacte)}$$

$$V \approx 47{,}1 \quad \text{(valeur approchée au dixième près)}$$

Le cône a un volume d'environ 47,1 m^3